Adres:

Postcode en Woonplaats:

Studierichting:

Jaar van eerste inschrijving:

Tentamen: Programmacorrectheid

Datum: 4 nov. 2003

Naam docent:

Opgave 1

1 $L(t) = (\Sigma i : 0 \le i < t : a[i])$

$L(0)$
= (* definitie van L *)
$(\Sigma i : 0 \le i < 0 : a[i])$
= (* sommatie over leeg domein *)
0

$L(t+1)$
= (* definitie van L *)
$(\Sigma i : 0 \le i < t+1 : a[i])$
= (* domeinsplitsen: $i < t+1 \equiv i < t \vee i = t$ *)
$(\Sigma i : 0 \le i < t : a[i]) + (\Sigma i : 0 \le i = t : a[i])$
= (* herkennen; toepassingsregel E15 $0 \le t$ *)
$L(t) + a[t]$

2 $R(0) = 0$
$R(t) = R(t-1) + a[n-t]$ voor $n-t < n$
($\Rightarrow 0 < t$)

3 $L(n)$
= (* definitie van L *)
$(\Sigma i : 0 \le i < n : a[i])$
= (* verwisseling van i en j *)
$(\Sigma j : 0 \le j < n : a[j])$
= (* rekenen *)
$(\Sigma j : n-n \le j < n : a[j])$
= (* definitie van R *)
$R(n)$

$0 < n \le n \wedge L(n) = R(n)$,
dus domein van MIN uit P is niet leeg

$P : M = (MIN\ i : 0 < i \le n \wedge L(i) = R(i) : i)$
$\equiv$
$P : 0 < M \le n \wedge L(M) = R(M) \wedge$
$(\forall i : 0 < i \le n \wedge L(i) = R(i) : M \le i)$

constant predikaat

<u>stap1</u> $J: 0 < m \leq M \leq n \wedge l = L(m) \wedge r = R(m)$
$B: l \neq r$

$J \wedge \neg B$

$\equiv$

$0 < m \leq M \leq n \wedge l = L(m) \wedge r = R(m) \wedge l = r$

$\Rightarrow$ (* $0 < m \leq M \leq n \Rightarrow 0 < m \leq n \wedge m \leq M$; invullen l en r *)

$m \leq M \wedge L(m) = R(m) \wedge 0 < m \leq n$

$\Rightarrow$ (* $0 < m \leq n \wedge L(m) = R(m) \Rightarrow M \leq m$ *)

$m \leq M \wedge M \leq m$

$\Rightarrow$

$Q: m = M$

<u>stap2</u>

$\{0 < M \leq n\}$

(* werk toe naar patroon van J *)

$\{0 < 1 \leq M \leq n \wedge L(0) + a[0] = L(1) \wedge R(0) + a[n-1] = R(1)\}$

(* rekenen *)

$\{0 < 1 \leq M \leq n \wedge a[0] = L(1) \wedge a[n-1] = R(1)\}$

m := 1;

$\{0 < m \leq M \leq n \wedge a[0] = L(m) \wedge a[n-1] = R(m)\}$

l := a[0];

r := a[n-1];

$\{0 < m \leq M < n \wedge l = L(m) \wedge r = R(m)\}$

(* herkennen *)

$\{J\}$

<u>stap3</u> vf : $M - m$

$J \wedge B$

$\equiv$

$0 < m \leq M \leq n \wedge l = L(m) \wedge r = R(m) \wedge l \neq r$

$\Rightarrow$ (* weglaten cojuncten; $0 < m \leq M \leq n \Rightarrow m \leq M$ *)

$m \leq M$

$\Rightarrow$ (* rekenen *)

$M - m \geq 0$

$\equiv$

$vf \geq 0$

Adres:
Postcode en
Woonplaats:

Studierichting:

Jaar van eerste inschrijving:

Tentamen:
Datum:
Naam docent:

<u>stap 4</u>

$\{ J \wedge B \wedge vf = V \}$
(* definities *)
$\{ 0 < m \leq M \leq n \wedge l = L(m) \wedge r = R(m) \wedge l \neq r \wedge M - m = V \}$
(* l en r invullen *)
$\{ 0 < m \leq M \leq n \wedge l = L(m) \wedge r = R(m) \wedge L(m) \neq R(m) \wedge M - m = V \}$
(* $L(m) \neq R(m) \wedge L(M) = R(M) \Rightarrow m \neq M$ *)
$\{ 0 < m < M \leq n \wedge l = L(m) \wedge r = R(m) \wedge M - m = V \}$
(* $L(m) + a[m] = L(m+1)$ als ~~m~~ $0 \leq m$;
$R(m) + a[n-(m+1)] = R(m+1)$ als $0 < m+1$ *)
$\{ 0 < m < M \leq n \wedge l + a[m] = L(m+1) \wedge r + a[n-(m+1)] = R(m+1) \wedge M - m = V \}$

l := l + a[m];
r := r + a[n-(m+1)];

$\{ 0 < m < M \leq n \wedge l = L(m+1) \wedge r = R(m+1) \wedge M - m = V \}$
(* rekenen *)
$\{ 0 < m+1 \leq M \leq n \wedge l = L(m+1) \wedge r = R(m+1) \wedge M - (m+1) < V \}$

m := m + 1;

$\{ 0 < m \leq M \leq n \wedge l = L(m) \wedge r = R(m) \wedge M - m < V \}$
(* herkennen *)
$\{ J \wedge vf < V \}$

<u>stap 5</u> samenvatting

```
VAR
  l, r : INTEGER;
  {P: 0 < M ≤ n ∧ L(M) = R(M) ∧
          (∀i : 0 < i ≤ n ∧ L(i) = R(i) : M ≤ i)}
  m := 1; l := a[0]; r := a[n-1];
  {J: 0 < m ≤ M ≤ n ∧ l = L(m) ∧ r = R(m)}
    (* vf = M - m *)
  WHILE l ≠ r DO
    l := l + a[m];
    r := r + a[n-(m+1)];
    m := m + 1;
  END;
  {Q: m = M}
```

Naam: | Studentnummer: | Blad nr: 3
Adres: | Studierichting: | Tentamen:
Postcode en | | Datum:
Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:

Opgave 2

4 $F(x,y) = (\Sigma i,j : \sout{\ldots} \wedge h(i,j) \geq 0 : j^2)$
$\quad 0 \leq i < x \wedge y \leq j < n$

Hier ga je het heel moeilijk mee krijgen.

5 $x = 0$:

$F(0,y)$
$=$ (* definitie F *)
$(\Sigma i,j : 0 \leq i < 0 \wedge y \leq j < n \wedge h(i,j) \geq 0 : j^2)$
$=$ (* sommatie over leeg domein *)
0

Te snel!

$y = n$:

$F(x,n)$
$=$ (* definitie F *)
$(\Sigma i,j : 0 \leq i < x \wedge n \leq j < n \wedge h(i,j) \geq 0 : j^2)$
$=$ (* sommatie over leeg domein *)
0

1

x verlagen:

$F(x,y)$
$=$ (* definitie F *)
$(\Sigma i,j : 0 \leq i < x \wedge y \leq j < n \wedge h(i,j) \geq 0 : j^2)$
$=$ (* domeinsplitsen: $i < x \equiv i < x-1 \vee i = x-1$ *)
$(\Sigma i,j : 0 \leq i < x-1 \wedge y \leq j < n \wedge h(i,j) \geq 0 : j^2)$
$\quad + (\Sigma i,j : 0 \leq i = x-1 \wedge y \leq j < n \wedge h(i,j) \geq 0 : j^2)$
$=$ (* herkennen; toepassingsregel EIS $0 \leq x-1$ *)
$F(x-1,y) + (\Sigma j : y \leq j < n \wedge h(x-1,j) \geq 0 : j^2)$
$=$ (* Stel $h(x-1,y) \geq 0$
$\quad \Rightarrow h(x-1,j) \geq h(x-1,y) \geq 0$ voor $j \geq y$,
$\quad$ want h is ascending in tweede argument *)
$F(x-1,y) + (y^2 + \ldots + n^2)$

2

Hierbij ga je hier geen geldige herschrijving ... dat is een programma van kwantitatieve hypothesen ... [illegible]

y verhogen:

$F(x,y)$
$=$ (* definitie F *)
$(\Sigma i,j : 0 \leq i < x \wedge y \leq j < n \wedge h(i,j) \geq 0 : j^2)$
$=$ (* domeinsplitsen: $y \leq j \equiv y+1 \leq j \vee y = j$ *)
$(\Sigma i,j : 0 \leq i < x \wedge y+1 \leq j < n \wedge h(i,j) \geq 0 : j^2)$

$+ (\Sigma i,j : 0 \le i < x \wedge y = j < n \wedge h(i,j) \ge 0 : j^2)$

$=$ (* herkennen ; toepassingsregel EIS $y < n$ *)

$F(x, y+1) + (\Sigma i : 0 \le i < x \wedge h(i,y) \ge 0 : j^2)$

$=$ (* Stel $h(x-1, y) < 0$

$\Rightarrow h(i,y) \le h(x-1,y) < 0$ voor $i \le x-1$,

want h is ascending in eerste argument *)

$F(x, y+1) + 0$

$=$

$F(x, y+1)$

6

```
VAR
  x, y : INTEGER;
  {P : Z = F(m,n)}
x := m;
y := 0;
z := 0;
  {J : z = Z - F(x,y) ∧ 0 ≤ x ≤ m ∧ 0 ≤ y ≤ n}
     (* vf = x + (n-y) *)
WHILE x ≠ 0 ∧ y ≠ n DO
  IF h(x-1, y) < 0 THEN
     y := y+1;
  ELSE
     z := z + (y² + ... + n²);
     x := x-1;
  END;
END;
  {Q : z = Z }
```

Naam:	Studentnr:	Blad nr. 4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

Opgave 3 — bewijsverplichtingen:

inductiehypothese ⇒ ~~∧ n ≥ 0 ∧ Y = F(n) ∧ T = n!~~

$\{ n \geq 0 \wedge Y = F(n) \wedge T = n! \wedge n = V \}$
berF(n);
$\{ y = Y \wedge t = T \}$

voor alle expressies n
alle waarden van spec. const.? Y en T
en alle waarden van V

waarbij de inductiehypothese

IH: $\{ E \geq 0 \wedge X = F(E) \wedge Z = E! \wedge E < V \wedge V \geq 0 \wedge R \}$
berF(E);
$\{ y = X \wedge t = Z \wedge R \}$

waarbij $var(R) \cap \{y, t\} = \phi$

$\{ n \geq 0 \wedge Y = F(n) \wedge T = n! \wedge n = V \}$
IF n = 0 THEN
$\{ n \geq 0 \wedge Y = F(n) \wedge T = n! \wedge n = 0 \wedge n = V \}$
(* invullen van n, rekenen *)
$\{ Y = 0 \wedge T = 1 \}$
y := 0;
t := 1;
$\{ y = Y \wedge t = T \}$
ELSE
$\{ n \geq 0 \wedge Y = F(n) \wedge T = n! \wedge n \neq 0 \wedge n = V \}$
(* $n \geq 0 \wedge n \neq 0 \Rightarrow n > 0$ *)
$\{ n > 0 \wedge Y = F(n) \wedge T = n! \wedge n = V \}$
(* gebruik definitie van F *)
$\{ n > 0 \wedge Y = F(n-1) + g(n) \cdot n! \wedge T = n! \wedge n = V \}$
(* rekenen *)
$\{ n-1 \geq 0 \wedge Y - g(n) \cdot T = F(n-1) \wedge T / n = (n-1)! \wedge n-1 < V \wedge V \geq 0 \}$

(* introduceer E voor n-1,
X voor Y-g(n)·T,
Z voor T/n *)

$\{ E \geq 0 \wedge X = F(E) \wedge Z = E! \wedge E < V \wedge V \geq 0$
$\wedge E = n-1 \wedge X = Y - g(n) \cdot T \wedge Z = T/n \}$

berF(E); dit is geen programma variabele/expr.

(* IH met E ← E
X ← X
Z ← Z
R ← $E = n-1 \wedge X = Y - g(n) \cdot T \wedge Z = T/n$ *)

$\{ y = X \wedge t = Z \wedge E = n-1 \wedge X = Y - g(n) \cdot T \wedge Z = T/n \}$

(* elimineer E, X, Z *)

$\{ y = Y - g(n) \cdot T \wedge t = T/n \}$

(* rekenen *)

$\{ y + g(n) \cdot T = Y \wedge t \cdot n = T \}$

~~y:=~~

t := t·n;

$\{ y + g(n) \cdot T = Y \wedge t = T \}$

~~y := y + g(n)~~

$\{ y + g(n) \cdot t = Y \wedge t = T \}$

y := y + g(n)*t;

$\{ y = Y \wedge t = T \}$

END;

$\{ y = Y \wedge t = T \}$

(* herkennen *)

$\{ Q \}$